Faculdade de Ciência e Tecnologia

Universidade Fernando Pessoa

Manual de docência para a disciplina de **Análise Matemática III**

Número de horas do programa: 45 horas

Número de horas semanal: 3 horas (2 + 1)

Número de horas por aula: 2 ou 1 horas

Programa:

1. **Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).**
   - 1.1. Conceito de solução.
   - 1.2. Aplicações. Modelação.
   - 1.3. Problemas de valor inicial.
   - 1.4. Equações diferenciais separáveis.
   - 1.5. Redução à forma de variáveis separadas.
   - 1.6. Equações diferenciais exactas.
   - 1.7. Factores integrantes.
   - 1.8. Como encontrar os factores integrantes.
   - 1.9. Equações diferencias lineares.
   - 1.10. Redução à forma linear. Equação de Bernoulli.
   - 1.11. Soluções aproximadas: campos direccionais, Iteração.
   - 1.12. Método dos campos direccionais.
   - 1.13. Método de iteração de Picard.
   - 1.14. Existência de solução e solução única.
   - 1.15. Resolução de exercícios.

Objectivos:

No presente capítulo começamos o nosso programa de estudo das equações diferenciais ordinárias e das suas aplicações considerando a mais simples destas equações. Estas são chamadas equações diferenciais de *primeira* ordem uma vez que envolvem somente a *primeira* derivada da função desconhecida. Neste capítulo e nos seguintes capítulos, um dos nossos principais objectivos é equipar o aluno com métodos para resolução de equações diferenciais, concentrando-nos em alguns de importância prática. O cálculo integral é um pré-requisito para este capítulo.

Bibliografia:

KREYSZIG, E. - “Advanced Engineering Mathematics”, Wiley, 7th Edition, 1993, páginas 2 a 37, páginas 48 a 61

Boyce, W., DiPrima, Richard – “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”, Wiley, 7th Edition, 2000, páginas 29 a 115, páginas 126 e 127

2. Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem.

2.1. Equações lineares homogéneas.

2.2. Equações homogéneas: Princípio de Superposição ou Linearidade

2.3. Problema de valor inicial.

2.4. Solução geral. Base.

2.5. Definição (Solução geral, Base, Solução particular).

2.6. Equações homogéneas com coeficientes constantes.

2.7. Função exponencial complexa.

2.8. Problemas de valor fronteira.

2.9. Equação de Euler-Cauchy.

2.10. Teoria da Existência e da Solução Única. Wronskiano.

2.11. Independência linear de soluções.

2.12. Redução de ordem: como obter uma segunda solução.

2.13. Equações não homogéneas.

2.14. Solução por coeficientes indeterminados.

2.15. Método de variação de parâmetros.

2.16. Resolução de exercícios.

Objectivos:

As equações diferenciais ordinárias podem ser divididas em duas grandes classes, nomeadamente, **equações** lineares e **equações não lineares**. Enquanto que as equações não lineares são geralmente difíceis, as equações lineares são muito mais simples porque as propriedades das suas soluções podem ser caracterizadas de uma forma geral e estão disponíveis métodos padrão para resolver muitas destas equações. Neste capítulo consideramos equações diferencias lineares de segunda ordem, equações **homogéneas** e equações **não homogéneas**. Existem duas razões importantes para nos concentramos nas equações de *segunda* ordem. Primeiro, elas têm aplicações importantes na teoria da mecânica e dos circuitos eléctricos, o que as torna mais importantes do que as equações lineares de ordem superior. Segundo, a sua teoria é típica das equações diferenciais lineares ed qualquer ordem. (mas com formulas mais simples do que nos casos de ordem superior), de forma que a transição para equações de ordem superior (no próximo capítulo) envolve somente muito poucas novas ideias (embora um aumento nas dificuldades técnicas). O capítulo 1 é um pré-requisito para este capítulo.

Bibliografia:

KREYSZIG, E. - “Advanced Engineering Mathematics”, Wiley, 7th Edition, 1993, páginas 62 a 79, páginas 90 a 109, páginas 124 a 127

Boyce, W., DiPrima, Richard – “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”, Wiley, 7th Edition, 2000, páginas 129 a 185, páginas 207 e 208

3. Equações Diferenciais Lineares de Ordem Superior.

3.1. Equações lineares homogéneas.
3.2. Definição (Solução geral, Base, Solução particular)
3.3. Definição (Independência e Dependência Linear).
3.4. Problema de valor inicial.
3.5. Existência e Solução única.
3.6. Independência linear de soluções. Wronskiano.
3.7. Equações homogéneas com coeficientes constantes.
3.8. Equações não homogéneas.
3.9. Problema de valor inicial.
3.10. Método dos coeficientes indeterminados.
3.11. Método de variação de parâmetros.
3.12. Resolução de exercícios.

Objectivos:

Neste capítulo mostramos que os conceitos e métodos para resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem no capítulo 2 extendem-se de forma directa às equações diferenciais lineares de ordem superior. Não são necessárias ideais realmente nova nessa extensão. A correspondência entre as secções é aproximada. Existem alguns traços novos tais como o papel mais proeminente do wronskiano, o maior número de possibilidades de raízes e a interessante extensão da demonstração de Lagrange. O capítulo 2 é um pré-requisito para este capítulo.

Bibliografia:

KREYSZIG, E. - “Advanced Engineering Mathematics”, Wiley, 7th Edition, 1993, páginas 128 a 151

Boyce, W., DiPrima, Richard – “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”, Wiley, 7th Edition, 2000, páginas 209 a 230

4. Transformadas de Laplace

- 4.1. Transformada de Laplace. Antitransformada.
- 4.2. Linearidade.
- 4.3. Existência de transformações de Laplace.
- 4.4. Transformadas de derivadas e integrais.
- 4.5. Equações diferenciais. Problemas de valor inicial.
- 4.6. Transformada de Laplace do integral de uma função.
- 4.7. Desvio de *s*, Desvio de *t*, Função escalão unitário.
- 4.8. Desvio *s*: substituição de *s* por *s-a* em *F(s)*.
- 4.9. Desvio *t*: substituição de *t* por *t-a* em *f(t)*.
- 4.10. Função escalão unitário *u(t-a)*.
- 4.11. Transformada de Laplace: Fórmulas gerais.
- 4.12. Resolução de exercícios.

Objectivos:

O método da transformada de Laplace resolve equações diferencias e os seus correspondentes problemas de valor inicial e valor fronteira. O processo da solução consiste em três passos principais: o “difícil” problema dado é transformado numa “simples” equação (**equação subsidiária**), a equação subsidiária é resolvida através de manipulações puramente algébricas, a solução da equação subsidiária é transformada de volta para obter a solução de um dado problema. Desta forma as transformadas de Laplace reduzem o problema da resolução de uma equação diferencial um problema algébrico. O terceiro passo é simplificado através de tabelas, cujo papel é similar ao das tabelas de integrais na integração. Esta troca de operações de cálculo para operações *algébricas* nas transformadas é chamada **cálculo operacional**, uma área muito importante na matemática aplicada, e o método da transformada de Laplace é praticamente o método mais importante para este propósito. Na verdade, as transformadas de Laplace têm numerosas aplicações na engenharia. São particularmente úteis em problemas onde a força motriz (mecânica ou eléctrica) tem descontinuidades, é impulsiva ou é periódica mas não meramente uma função seno ou cosseno. Outra vantagem é que o método resolve problemas directamente. Na verdade, os problemas de valor inicial são resolvidos sem primeiro determinar uma solução geral. Similarmente, as equações não homogéneas são resolvidas sem primeiro resolver a correspondente equação homogénea. O capítulo 2 é um pré-requisito para este capítulo.

Bibliografia:

KREYSZIG, E. - "Advanced Engineering Mathematics", Wiley, 7th Edition, 1993, páginas 261 a 283, páginas 289 a 293, páginas 317 a 324

Boyce, W., DiPrima, Richard – "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", Wiley, 7th Edition, 2000, páginas 293 a 317, páginas 337 e 338

Program:

1. **Ordinary Differential Equations (ODE).**
   - 1.1. Concept of solution.
   - 1.2. Applications. Modeling.
   - 1.3. Initial value problems.
   - 1.4. Separable differential equations.
   - 1.5. Reduction to separable variables form.
   - 1.6. Exact differential equations.
   - 1.7. Integrating factors.
   - 1.8. How to find integrating factors.
   - 1.9. Linear differential equations.
   - 1.10. Reduction to linear form. Bernoulli equation.
   - 1.11. Approximate solutions: direction fields, Iteration.
   - 1.12. Direction fields method.
   - 1.13. Picard´s iteration method.
   - 1.14. Existence and uniqueness of solutions.
   - 1.15. Exercises solving.

Purposes:

In the present chapter we begin our program of studying ordinary differential equations and their applications by considering the simplest of these equations. These are called differential equations of the *first* order since they involve only the *first* derivative of the unknown function. In this chapter and the following chapters, one of our main goals is to equip the student with methods for solving differential equations, concentrating on some which are of practical importance. Prerequisite for this chapter is integral calculus.

Bibliography:

KREYSZIG, E. - “Advanced Engineering Mathematics”, Wiley, 7th Edition, 1993, pages 2 to 37, pages 48 to 61

Boyce, W., DiPrima, Richard – “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”, Wiley, 7th Edition, 2000, pages 29 to 115, pages 126 and 127

2. Second-Order Linear Differential Equations.

2.1. Homogeneous linear equations.
2.2. Homogeneous equations: Superposition or Linearity principle
2.3. Initial value problem.
2.4. General solution. Basis.
2.5. Definition (General solution, Basis, Particular solution).
2.6. Homogeneous equations with constant coefficients.
2.7. Complex exponential function.
2.8. Boundary value problems.
2.9. Euler-Cauchy equation.
2.10. Existence and uniqueness theory. Wronskian.
2.11. Linear independence of solutions.
2.12. Reduction of order: how to obtain a second solution.
2.13. Nonhomogeneous equations.
2.14. Solution by undetermined coefficients.
2.15. Variation of parameters method.
2.16. Exercises solving.

Purposes:

The ordinary differential equations may be divided into two large classes, namely, **linear equations** and **nonlinear equations**. Whereas nonlinear equations are difficult in general, linear equations are much simpler because properties of their solutions can be characterized in a general way and standard methods are available for solving many of these equations. In this chapter we consider second-order linear differential equations, **homogeneous** equations and **nonhomogeneous** equations. There are two main reasons for concentrating on equations of *second* order. First, they have important applications in mechanics and in electric circuit theory, which make them more important than higher order linear equations. Second, their theory is typical of that of linear differential equations of any order (but with simpler formulas than in higher order cases), so that the transition to higher order equations (in the next chapter) involves only vary few new ideas (although an increase in technical difficulties). Prerequisite for this chapter is chapter 1.

Bibliography:

KREYSZIG, E. - "Advanced Engineering Mathematics", Wiley, 7th Edition, 1993, pages 62 to 79, pages 90 to 109, pages 124 to 127

Boyce, W., DiPrima, Richard – "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", Wiley, 7th Edition, 2000, pages 129 to 185, pages 207 and 208

3. Higher Order Linear Differential Equations.

3.1. Homogeneous linear equations.

3.2. Definition (General solution, Basis, Particular solution)

3.3. Definition (Linear Independence and Dependence).

3.4. Initial value problem.

3.5. Existence and uniqueness of solutions.

3.6. Linear independence of solutions. Wronskian.

3.7. Homogeneous equations with constant coefficients.

3.8. Nonhomogeneous equations.

3.9. Initial value problem.

3.10. Undetermined coefficient method.

3.11. Variation of parameters method.

3.12. Exercises solving.

Purposes:

In this chapter we show that the concepts and the methods for solving second-order linear differential equations in chapter 2 extend in a straightforward fashion to linear differential equations of higher order. No really new ideas are needed in that extension. The correspondence between sections is roughly. There are some new features as the more prominent role of the Wronskian, the larger number of possibilities of roots and the interesting extension of Lagrange´s proof. Prerequisite for this chapter is chapter 2.

Bibliography:

KREYSZIG, E. - “Advanced Engineering Mathematics”, Wiley, 7th Edition, 1993, pages 128 to 151

Boyce, W., DiPrima, Richard – “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”, Wiley, 7th Edition, 2000, pages 209 to 230

4. Laplace Transforms.

4.1. Laplace transform. Inverse transform.
4.2. Linearity.
4.3. Existence of Laplace Transforms.
4.4. Transforms of derivatives and integrals.
4.5. Differential equations. Initial value problems.
4.6. Laplace transform of the integral of a function.
4.7. *s*-Shifting, *t*-Shifting, Unit step function.
4.8. *s*-Shifting: replacing *s* by *s-a* in *F(s)*.
4.9. *t*-Shifting: replacing *t* by *t-a* in *f(t)*.
4.10. Unit step function *u(t-a)*.
4.11. Laplace transform: general formulas.
4.12. Exercises solving.

Purposes:

The Laplace transform method solves differential equations and corresponding initial and boundary value problems. The process of solution consists of three main steps: the given “hard” problem is transformed into a “simple” equation (**subsidiary equation**), the subsidiary equation is solved by purely algebraic manipulations, the solution of the subsidiary equation is transformed back to obtain the solution of the given problem. In this way Laplace transforms reduce the problem of solving a differential equation to an algebraic problem. The third step is made easier by tables, whose role is similar to that of integral tables in integration. This switching from operations of calculus to *algebraic* operations on transforms is called **operational calculus**, a very important area of applied mathematics, and the Laplace transform method is practically the most important method for this purpose. Indeed, Laplace transforms have numerous engineering applications. They are particularly useful in problems where the (mechanical or electrical) driving force has discontinuities, is impulsive or is periodic but not merely a sine or a cosine function. Another advantage is that the method solves problems directly. Indeed, initial value problems are solved without first determined a general solution. Similarly, nonhomogeneous equations are solved without first solving the corresponding homogeneous equation. Prerequisite for this chapter is chapter 2.

Bibliography:

KREYSZIG, E. - “Advanced Engineering Mathematics”, Wiley, 7th Edition, 1993, pages 261 to 283, pages 289 to 293, pages 317 to 324

Boyce, W., DiPrima, Richard – “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”, Wiley, 7th Edition, 2000, pages 293 to 317, pages 337 and 338